**דו"ח מסכם בניסוי: תנועה הרמונית**

**חלק: \_\_\_\_**

סמסטר ב' תשס"ה

שם הבודק : \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

תאריך הבדיקה: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

ציון הדו"ח: **I** \_\_\_\_

**II** \_\_\_\_

שם מדריך הניסוי (שם מלא): יונתן מסיקה

תאריך ביצוע הניסוי: .12.11.2015

תאריך הגשת הדו"ח: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**הדו"ח מוגש על ידי:**

**I** 302815618 טום רז **II** 201493525 אמיר מרקוביץ'

ת.ז. שם פרטי משפחה ת.ז. שם פרטי משפחה

הנדסת חשמל \_\_\_\_04\_\_\_\_\_ \_\_\_\_K\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

מסלול הלימוד מס' קבוצת המעבדה תת קבוצה מספר עמדה

**הערות הבודק לנושאים לקויים בדו"ח:**

**מטרת הניסוי**

1. אימות המודל התאורטי של מטוטלת פיסיקאלית ומתמטית.
2. חישוב רדיוס ההתמד של המטוטלת הפיזקאלית.
3. חישוב תאוצת הכובד – g.

**רקע תאורטי**

תנועה הרמונית היא סוג של תנועה מחזורית המתרחשת עבור זויות קטנות. מטוטלת מתמטית היא מערכת פיסיקאלית המרוכבת מחוט באורך L, ומסה M בקצה. המטוטלת מבצעת בקירוב תנועה הרמונית.

נקודת התלייה

**איור 1 –** מטוטלת מתמטית

x

L

m

*המהירות בה משתנה הזווית היא w, והיא נקראת מהירות זוויתית. הזמן בו מתבצע מחזור תנועה שלם נקרא "זמן מחזור" והוא מסומן באות T.*



*כאשר* T *הוא זמן המחזור של התנועה ו-היא המהירות הזוויתית. המסה מבצעת תנועה לאורך קשת המעגל בהשפעת כוח העבידה, כאשר הכוח הפועל עליה לאורך הקשת הוא ומהגדרת הזווית ופונקציית הסינוס מתקבל . בקירוב לזווית קטנות ניתן לקרב את המרחק* x *לאורך הקשת של המעגל עליו נעה* m. *אורך קשת זו היא* .

*המסה נעה על אורך הקשת ולפי החוק השני של ניוטון:*



*מפתרון משוואה דיפרנציאלית זו מתקבל כי , ומהצבה בנוסחה (1) נקבל*

*(4)*

*כלומר – זמן המחזור אינו תלוי במסת המטוטלת, m, אלא רק בתאוצת הכובד g ואורך החוט L.*

**מטוטלת פיזיקאלית**:

במטוטלת פיזיקאלית לא מדובר במסה שתלויה על חוט בעל משקל זניח, שכן לכל המערכת יש מסה שמשפיעה על תנועתה. ההבדל המשמעותי בין מטוטלת פיזיקאלית למטוטלת ממתמטית היא שזמן המחזור של תנודות המטוטלת הפיזיקאלית תלוי במרחק שבין מרכז המסה ונקודת תליית הגוף. ככל שנרחיק את נקודת התליה מנקודת מרכז המסה, כך ילך ויקטן זמן המחזור של התנודה. מצד שני, אם נתלה את הגוף במרחק גדול מאד מנקודת מרכז המסה שלו, נוכל להסתכל עליו כגוף נקודתי, ולכן תנועתו תהיה דומה לתנועת מטוטלת מתמטית. אם כן, ישנו מרחק מסוים בין נקודת התלייה ומרכז המסה הנותן זמן מחזור מינימלי. מרחק זה ידוע בשם רדיוס ההתמד של הגוף אותו נחפש בניסוי.

נקודת התלייה

מרכז המסה

**איור 2 –** מטוטלת פיזיקאלית

*מיקום מרכז המסה של הגוף יחושב על ידי הנוסחה:*

*(5)*

*כאשר Xcm הוא מרכז המסה, הוא מיקום המסה .*

*מומנט ההתמד של גוף קשיח הינו מדד ליכולתו של הגוף למנוע שינוי במהירותו הזוויתית. מומנט ההתמד נתון על ידי הנוסחה:*

*(6)*

*כאשר* r *הוא המרחק של כל מסה מציר הסיבוב*

*עבור מוט ידוע שמומנט ההתמד סביב מרכז המסה הוא כאשר* M *מסת המוט ו*L *אורך המוט. עבור דיסקת המשקולת מומנט ההתמד סביב מרכז המסה הוא כאשר* R *רדיוס הדסקה.*

*התנע הזוויתי של המטוטלת*

*(8)*

כאשר J הוא התנע הזוויתי, P התנע הקווי, I מומנט ההתמד של הגוף.

*המומנט שגוף מפעיל על נקודה כלשהי הינו מכפלה ווקטורית של הכוח במרחק בין נקודת הפעלת הכוח לנקודת החישוב. בחישוב המומנט שמפעיל מרכז המסה על נקודת התלייה מתקבל:*

*(9)*

*כאשר* l *הוא המרחק בין נקודת התלייה למרכז המסה ו*N *המומנט שמפעיל הכוח בנקודת התלייה.*

*לפי החוק השני של ניוטון מתקבל שהמומנט* N *שווה לנגזרת התנע הזוויתי בזמן. מקירוב זוויות קטנות . הצבת נוסחה (9) בנוסחה (8) במשוואה זו:*

*(10)*

*נקבל את מפתרון המשוואה הדיפרנציאלית. לאחר הצבה בנוסחא (1) נקבל:*

*(11)*

*בעזרת משפט שטיינר נוכל לחשב את מומנט ההתמד סביב נקודת התלייה, הנמצאת במקום שרירותי על הגוף. משפט שטיינר מקשר בין מומנט ההתמד סביב מרכז המסה למומנט ההתמד סביב נקודה שירותית על גבי הגוף*

*(12)*

*כאשר מומנט ההתמד סביב מרכז המסה, m מסת הגוף הקשיח,* l *המרחק בין מרכז המסה לנקודה בה רוצים לחשב את מומנט ההתמד. הצבת נוסחה (12) בנוסחה (11) תיתן לנו את הנוסחה הרצויה*

*(13)*

*כאשר הוא מומנט ההתמד של הגוף סביב מרכז המסה שלו, l מרחק מרכז המסה מנקודת התליה, m מסת הגוף, ו-T זמן המחזור. ערך שדה הכבידה של כדור הארץ הינו*

***חלק א' – מטוטלת פיזיקאלית***

***רשימת ציוד – מטוטלת פיזיקאלית***

1. מוט קשיח.
2. משקולת מתכת גלילית
3. סרגל ארוך בעל רזולציה של 1 מ"מ
4. מאזני שקילה
5. וו תלייה המחובר למוט שמיקומו ניתן לשינוי.
6. שני ברגים המחוברים למוט ומונעים את נפילת וו התלייה והמשקולת.
7. משקל אלקטרוני ברזולוציה של .
8. שער אופטי המחובר לשעון עצר ברזולוציה של .
9. קליבר ברזולוציה של .

***מהלך הניסוי – מטוטלת פיזיקאלית***

1. *מדידת המסה עבור: המוט, המשקולת, וו התליה, שני הברגים.*
2. *הרכבת המשקולת על המוט וקיבועה.*
3. *הזזת מיקום וו התלייה על המוט וקיבועו על המוט.*
4. *מדידת מרכז המסה של המטוטלת.*
5. *מדידת המרחק בין של נקודת התלייה ממרכז המסה*
6. *הסטת המטוטלת ממצב שיווי משקל, תוך שמירה על זוויות קטנות.*
7. *רישום זמני המחזור המתקבלים ממכשיר מדידת הזמן.*
8. *חזרה על צעדים ג-ז לקבלת מספר מדידות.*

**איור 3 –** תרשים הניסוי

שעון עצר

שער אופטי

נקודת התלייה

***תכנון עיבוד תוצאות***

במהלך החישובים נזניח את הוו והברגים בחישובי המסה הכוללת וחישובי מומנט התמד. מסת רכיבים אלו קטנה באופן יחסי מסה של שאר רכיבי המערכת. מסת הוו מהווה כ1.5% ממסת המערכת, והברגים מהווים כעשירית האחוז.

חישוב שגיאת המסה הכוללת תיתבסס על סכימת השגיאות של כל אחת ממדידות המסה. מכיוון שהשגיאה במדידת המסה תלויה רק ברזולצית מכשיר המדידה, נחשב את השגיאה הכוללת ע"י סכימת שלושת רכבי השגיאה של המשקל ע"פ נוסחה 4.17 בחוברת הסטטיסטיקה.

(14)

כאשר שגיאת המכשיר ו שגיאת המשקל הכולל.

חישוב השגיאה הטטיסטית בזמן תבוצע ע"י נוסחאות 3.9 ו3.10 בחוברת הסטטיסטיקה. שגיאת שעון העצר הינה רזולציית המכשיר. נחבר את השגיאה הסטטיסטית והשגיאה של מכשיר המדידה

(15)

כאשר השגיאה הסטטיסטית ו השגיאה בשעון העצר.

מכיוון שבכדי להציב בנוסחה (13) נדרש T^2 נחשב את השגיאה עבור ערך זה.

(16)

כאשר הוא זמן המחזור הממוצע בין ארבעת המדידות לכל נקודת תלייה.

מנוסחה (12) נקבל את הביטוי הבא למומנט ההתמד של המוט סביב נקודת התלייה.

(17)

כאשר מומנט התמד הכולל סביב מרכז המסה, L אורך המוט, A וB המרחקים של מרכז המסה של הגוף ממרכז המסה של המוט והדיסק בהתאמה, רדיוס הדיסק, מסת המוט והמשקולת בהתאמה.

נחשב את השגיאה עבור נוסחה (7) כאשר מומנט התמד הכולל סביב מרכז המסה, מסת המוט והמשקולת בהתאמה,  *המרחקים כפי שהוגדרו באיור 3.*

*שגיאת מומנט ההתמד על פי נוסחת הנגזרות החלקיות:*



*כאשר כל הגדלים הוסברו לעיל.*

נוסחה (13) מתארת פונקציית התאמה היפרבולית מהסוג- .

ויסומן

על פי איור 3 הינו המרחק בין נקודת התלייה למרכז המסה של הגוף.

נחשב באמצעות מודל ההתאמה את a1,a2 ושגיאותיהם. מתוך ערכים אלו נחלץ את תאוצת הכובד – g, מנוסחה (13) נקבל , .

מומנט ההתמד – מנוסחה 10 וסימון ההתאמה  *ו-*

על מנת לחשב את רדיוס ההתמד של גוף קשיח , נגזור את נוסחה 13 ונמצא נקודת מינימום, נקבל וחישוב השגיאה עפ"י נגזרות חלקיות

לפי נוסחה 10 והערכים המתקבלים ו -

לערכי  *, ו- תתבצע בדיקת טיב התאמה.*

**עיבוד תוצאות**



***איור 4-*** *גרף התאמה עבור זמן המחזור בריבוע כפונקציה של מרחק ממרכז המסה*

*ע"פ ההתאמה התקבלו הערכים*

1. *a1 = 24.507 ± 0.092 [cm\*sec^2]*
2. *a2 = 0.039697 ± 0.000711 [sec^2/cm]*
3. *chi^2\_reduced = 1.2*
4. *p-value= 0.28*

נתאים את היחידות של המקדמים a1 וa2 כדי לעבוד במערכת MKS, את a1 ע"י חילוק ב100 ואת a2 ע"י הכפלה ב100.

1. *a1 = 0.24507 ± 0.00092 [m\*sec^2]*
2. *a2 = 3.9697 ± 0.0711 [sec^2/m]*

הp-value נמצא בטווח תקין, והchi^2 reduced יחסית נמוך, נסיק מכך שההתאמה טובה, והגרף אכן מתאר נכונה את התופעה הפיזיקלית. גרף השארים מופיע בנספח א, ניתן לראות שהפיזור אקראי וכל הנקודות נמצאות במרחק של פחות מסטיית תקן אחת.

חילוץ הערכים

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| שם | ערך נמדד | שגיאה יחסית | ערך תאורטי | טיב התאמה |
| g | 9.94 *±* 0.18 [m/sec^2] | 0.018 |  | 0.72 |
|  | 0.2036 *±* 0.0044 [kgm^2] | 0.022 | 0.2002 *±* 0.0025 [kgm^2] | 0.67 |
|  | 0.2485*± 0.0029 [m]* | 0.012 | 0.2463 *±* 0.0012 [m] | 0. 70 |

ניתן לראות שהשגיאות היחסיות קטנות, כמו כן מדדי טיב ההתאמה בטווח הרצוי(קטנים מ-3), לכן נסיק מכך שהערכים החזויים מתארים בצורה נכונה את תוצאות הניסוי.

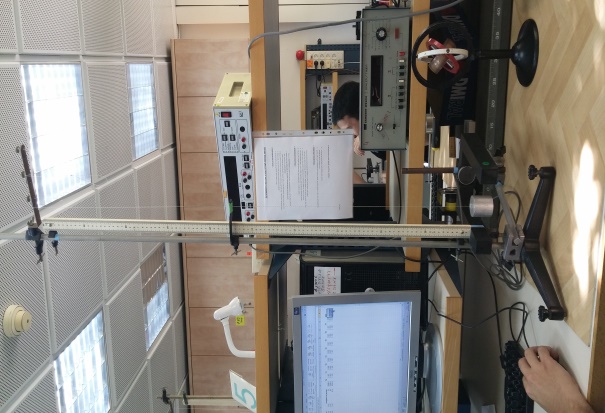
**חלק ב' – מטוטלת מתמטית**

***רשימת ציוד – מטוטלת מתמטית***

1. חוט לחיבור המסה לנקודת התליה (משקלו זניח ביחס למסה, אינו נמתח בתנועה).
2. משקולת מתכת גלילית.
3. סרגל ארוך בעל רזולציה של 1 מ"מ
4. מעמד לאורכו סרגל ארוך (ברזולוציה של 1מ"מ) לתליית סמן המתכת המגביל את תנועת המשקולת ביחס לגובה מיקומו.
5. שער אופטי המחובר לשעון עצר ברזולוציה של .
6. קליבר ברזולוציה של .

***מהלך הניסוי – מטוטלת מתמטית***

1. *תליית המשקולת מגובה ראש המעמד, ו-ווידוא שהחוט מקביל לסרגל במנוחה.*
2. *בחירת גובה לסמן המתכת המגביל את תנועת החוט (החוט זז רק מתחתיו) וקיבועו למעמד.*
3. *הסטת המטוטלת ממצב שיווי משקל, תוך שמירה על זוויות קטנות.*
4. *רישום זמני המחזור המתקבלים ממכשיר מדידת הזמן.*
5. *חזרה על צעדים 1-3 לקבלת מספר מדידות.*

******

משקולת

חוט התלייה

שעון עצר אופטי

מעמד תלייה

***תכנון ועיבוד תוצאות***

חישוב השגיאה הטטיסטית בזמן תבוצע ע"י נוסחאות 3.9 ו3.10 בחוברת הסטטיסטיקה. שגיאת שעון העצר הינה רזולציית המכשיר. נחבר את השגיאה הסטטיסטית והשגיאה של מכשיר המדידה

(18)

כאשר השגיאה הסטטיסטית ו השגיאה בשעון העצר.

מכיוון שאנחנו מבצעים התאמה לינארית, נקבל מ(4) את הנוסחה הבאה:

*(19)*

*כאשר הוא ריבוע זמן המחזור, l הוא אורך המוט, עד לנקודת מרכז המסה של המשקולת בקצהו.*

לכן, השגיאה עבור תהיה

(20)

כאשר הוא זמן המחזור הממוצע בין ארבעת המדידות לכל נקודת תלייה.

השגיאה עבור מדידת הגובה היא שגיאת מכשיר בלבד, נחשבה ע"י נוסחה 3.3 בחוברת הסטטיסטיקה.

נוסחה (20) מתארת פונקציית התאמה לינארית מהסוג- .

ויסומן

מה משמעות האיבר החופשי?

מההתאמה נקבל את a1,a2 ושגיאותיהם. נחלץ את g ואת שגיאתו

**עיבוד תוצאות:**



איור 5 – *גרף התאמה לינארית עבור זמן המחזור בריבוע כפונקציה של אורך החוט*

a1 = -0.0109 ± 0.0053 [sec^2]

a2 = 4.0525 ± 0.0053 [sec^2/m]

chi^2\_reduced = 1.3672

p-value= 0.23313

הגרף מייצג 7 נקודות, כאשר הנקודה הממוספרת בנספח ד' כ-1 לא הוכנסה לגרף כיוון שהייתה רחוקה מאוד מגרף ההתאמה ביחס לשאר הנקודות וגרמה לעיוות ההתאמה.

ניתן לראות שההתאמה תקינה, ערך הp-value נמצא בטווח תקין, לכן ההתאמה מתארת בצורה מדוייקת את התופעה הפיזיקלית. כמו כן מגרף השארים שבנספח ג' ניתן לראות שכל הנקודות הן במרחק של עד סטיית תקן אחת.

נחלץ את g ונקבל

0.013 [m/sec^2]

השגיאה היחסית היא 0.0013.

0.69

מדד טיב ההתאמה קטן וממנו נסיק שתוצאות הניסוי אכן מתארת את הנוסחות התאורטיות כמצופה.

**דיון ומסקנות**

בניסוי אימתנו את המודל התיאורטי של מטוטלת פיזיקאלית ומתמטית.

מטרות הניסוי הושגו בהצלחה, תוך השגת תוצאות קרובות למודל התאורטי.

**מטוטלת פיזיקאלית**

אכן ניתן לראות שמתקיים קשר היפרבולי בין זמן המחזור בריבוע לבין מרחק נקודת התליה מנקודת מרכז המסה.

**מטוטלת מתמטית**

ניתן לראות בבירור שמתקיים הקשר בין זמן המחזור בריבוע לאורך המטוטלת.

*לסיכום שני הניסויים, ניתן לומר ששניהם תאמו באופן מלא את התאוריה של התנועה ההרמונית, והערכים שהתקבלו קרובים ברמה טובה מאוד לערכים התאורטיים.*

***נספחים***

***נספח א – גרף השארים עבור פונקציית ההתאמה למטוטלת פיזיקאלית***

**

***נספח ב'- המדידות שבוצעו במהלך הניסוי – מטוטלת פיזיקאלית***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| l[cm] | dl[cm] | T1[sec] | T2[sec] | T3[sec] | T4[sec] | T- AVRAGE[sec] | (T-AVRAGE)^2[sec^2] | Δt\_stat[sec] | Δt\_inst[sec] | Δt\_final[sec] | Δt\_avg^2[sec^2] |
| 24.94 | 0.029 | 1.439 | 1.439 | 1.44 | 1.44 | 1.43950 | 2.0722 | 0.00029 | 0.00029 | 0.00041 | 0.0012 |
| 23.39 | 0.029 | 1.441 | 1.441 | 1.442 | 1.44 | 1.44100 | 2.0765 | 0.00041 | 0.00029 | 0.00050 | 0.0014 |
| 22.6 | 0.029 | 1.443 | 1.445 | 1.443 | 1.443 | 1.44350 | 2.0837 | 0.00050 | 0.00029 | 0.00058 | 0.0017 |
| 37.4 | 0.029 | 1.495 | 1.495 | 1.494 | 1.495 | 1.49475 | 2.2343 | 0.00025 | 0.00029 | 0.00038 | 0.0011 |
| 47.1 | 0.029 | 1.577 | 1.577 | 1.576 | 1.577 | 1.57675 | 2.4861 | 0.00025 | 0.00029 | 0.00038 | 0.0012 |
| 42.06 | 0.029 | 1.533 | 1.534 | 1.533 | 1.533 | 1.53325 | 2.3509 | 0.00025 | 0.00029 | 0.00038 | 0.0012 |
| 17.55 | 0.029 | 1.482 | 1.482 | 1.482 | 1.483 | 1.48225 | 2.1971 | 0.00025 | 0.00029 | 0.00038 | 0.0011 |
| 32.59 | 0.029 | 1.463 | 1.463 | 1.464 | 1.464 | 1.46350 | 2.1418 | 0.00029 | 0.00029 | 0.00041 | 0.0012 |
| 27.55 | 0.029 | 1.443 | 1.444 | 1.444 | 1.443 | 1.44350 | 2.0837 | 0.00029 | 0.00029 | 0.00041 | 0.0012 |
| 67.1 | 0.029 | 1.77 | 1.771 | 1.771 | 1.769 | 1.77025 | 3.1338 | 0.00048 | 0.00029 | 0.00056 | 0.0020 |
| 12.4 | 0.029 | 1.601 | 1.6 | 1.601 | 1.602 | 1.60100 | 2.5632 | 0.00041 | 0.00029 | 0.00050 | 0.0016 |
| 62.1 | 0.029 | 1.721 | 1.72 | 1.7212 | 1.7212 | 1.72085 | 2.9613 | 0.00029 | 0.00029 | 0.00041 | 0.0014 |
| 57 | 0.029 | 1.672 | 1.672 | 1.672 | 1.673 | 1.67225 | 2.7964 | 0.00025 | 0.00029 | 0.00038 | 0.0013 |
| 52.3 | 0.029 | 1.626 | 1.625 | 1.624 | 1.625 | 1.62500 | 2.6406 | 0.00041 | 0.00029 | 0.00050 | 0.0016 |

**l,** **Δl –** *המרחק בין מרכז המסה של המוט לנקודת התלייה ושגיאתו בסנטימטר,* **t1,t2,t3,t4** *– זמני מחזור של ארבעה מחזורי תנודות של המוט סביב נקודת התלייה בשניות,* **T\_avg** *– זמן מחזור ממוצע בשניות,* **ΔT\_stat** *– השגיאה הסטטיסטית של זמן המחזור בשניות,* **ΔT\_inst** *– שגיאת מכשיר מדידת הזמן בשניות,* **ΔT\_fin** *– שגיאת זמן המחזור למחזור יחיד בשניות, – ריבוע זמן המחזור ושגיאתו בשניות בריבוע.*

***נספח ג' –*** *גרף שארים עבור ההתאמה הלינארית למטוטלת המתמטית*